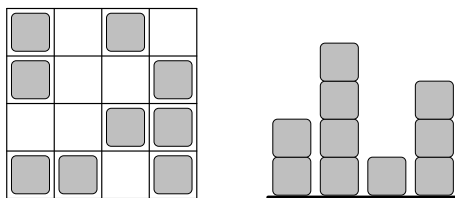


9 класс. Решения задач

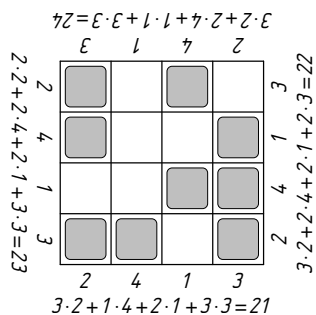
1. При каком наименьшем натуральном n число $(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)$ натурально и оканчивается тремя нулями?

РЕШЕНИЕ. Понятно, что $n \geq 5$. Чтобы число оканчивалось тремя нулями, необходимо и достаточно, чтобы оно делилось на 125 и на 8. Из четырёх последовательных натуральных чисел не более одного делится на 5, поэтому нужно, чтобы число, кратное пяти, было среди них и делилось на 125. С другой стороны, из любых четырёх последовательных натуральных чисел ровно одно делится на 4 и ещё ровно одно делится на 2 (но не на 4), поэтому их произведение всегда делится на 8. Ясно, что наименьшее возможное n — то, при котором $n-1 = 125$, то есть $n = 126$.

2. В банке в сейфе лежат кубические золотые слитки. На рисунке слева показан вид сверху расположения слитков, а на рисунке справа — вид с одной из четырёх боковых сторон сейфа. Какое максимальное количество золотых слитков может быть в сейфе?



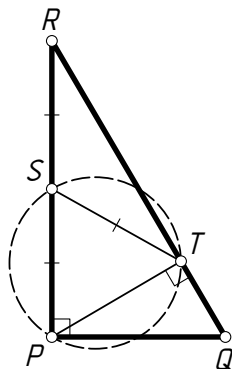
РЕШЕНИЕ. Предположим, что на рисунке справа показан вид с той стороны сейфа, которая соответствует нижней стороне квадрата на левом рисунке. Тогда в первом слева ряду на левом рисунке в каждом из трёх непустых квадратов лежит не больше двух слитков (иначе в левом ряду на правом рисунке было бы больше двух слитков). Значит, всего в первом слева ряду на левом рисунке лежит не больше, чем $2 \cdot 3 = 6$ слитков. Аналогично, во втором, третьем и четвёртом рядах слева на левом рисунке лежит не больше, чем $4 \cdot 1 = 4$, $1 \cdot 2 = 2$ и $3 \cdot 3 = 9$ слитков соответственно. Получаем, что всего слитков не больше, чем $6 + 4 + 2 + 9 = 21$. Прodelывая аналогичные рассуждения в ситуациях, когда на рисунке справа изображён вид с боковой стороны, отвечающей правой, верхней и левой сторонам квадрата на рисунке слева, получим, что для этих случаев количество слитков не больше, чем $2 \cdot 3 + 4 \cdot 2 + 1 \cdot 2 + 3 \cdot 2 = 22$, $2 \cdot 3 + 4 \cdot 2 + 1 \cdot 1 + 3 \cdot 3 = 24$ и $2 \cdot 2 + 4 \cdot 2 + 1 \cdot 2 + 3 \cdot 3 = 23$ соответственно (см. рисунок).



Итого, в сейфе не могло быть больше, чем 24 слитка. Нужный пример строится очевидно: в каждый непустой квадрат на рисунке слева нужно положить максимально возможное количество слитков, диктуемое рисунком справа (в случае, когда на рисунке справа показан вид с боковой стороны, отвечающей верхней стороне квадрата на рисунке слева).

3. В неравностороннем прямоугольном треугольнике длина гипотенузы равна 2021. Найдите радиус окружности, проходящей через вершину прямого угла, основание высоты, опущенной из этой вершины на гипотенузу, и середину большего катета.

РЕШЕНИЕ. *I способ.* Обозначим точки так, как на рисунке: P — вершина прямого угла в прямоугольном треугольнике PQR , T — основание высоты, опущенной из P на гипотенузу, S — середина стороны большего катета.



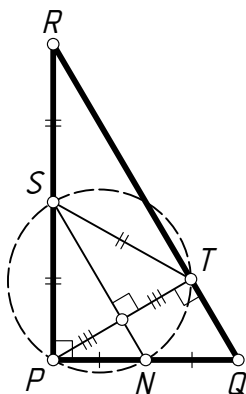
Заметим, что $ST = SP = SR$ (ибо TS — медиана в прямоугольном треугольнике PTR , она равна половине гипотенузы PR). Значит, радиус описанной около треугольника PST окружности равен

$$r = \frac{PS \cdot ST \cdot PT}{4\sqrt{p(p-PS)(p-ST)(p-PT)}} = \frac{PS^2}{\sqrt{4PS^2 - PT^2}},$$

где p — полупериметр этого треугольника. Далее, $\sqrt{4PS^2 - PT^2} = \sqrt{PR^2 - PT^2} = RT$ по теореме Пифагора, причём $\frac{PR}{RT} = \frac{RQ}{PR}$ из подобия прямоугольных треугольников PQR и TPR . Таким образом,

$$r = \frac{PS^2}{\sqrt{4PS^2 - PT^2}} = \frac{PR^2}{4RT} = \frac{PR}{4} \cdot \frac{RQ}{PR} = \frac{RQ}{4} = \frac{2021}{4}.$$

II способ. Обозначим через N середину стороны PQ (см. рисунок); остальные буквы обозначают такие же точки, как в первом способе.



Тогда SN — средняя линия треугольника PQR , поэтому она параллельна гипотенузе QR и вдвое короче, то есть имеет длину $\frac{2021}{2}$. По теореме Фалеса, точка пересечения SN и PT делит отрезок PT пополам. Но $PS = ST$ (см. первый способ), поэтому SN и PT перпендикулярны. Рассмотрим теперь окружность, построенную на SN как на диаметре. Точка P лежит на ней, так как угол SPN прямой. Но точка T симметрична точке P относительно прямой SN , значит, T тоже лежит на этой окружности. Значит, это и есть окружность из условия, а радиус её равен $\frac{SN}{2} = \frac{2021}{4}$.

4. Есть натуральные числа от 1 до 2021. Какое наибольшее число из них можно взять так, чтобы сумма любых двух из взятых чисел не делилась на их разность?

РЕШЕНИЕ. Если взять числа от 1 до 2021, дающие в остатке один при делении на три (их всего $\frac{2022}{3} = 674$), то сумма любых двух взятых не будет делиться на разность, потому что сумма не делится на три (она будет давать остаток два), а разность делится. Покажем, что больше 674 чисел взять нельзя. Для этого заметим, что из любых двух подряд идущих чисел, очевидно, нельзя взять больше одного (если взять оба, то их сумма поделится на их разность, равную единице). Более того, из любых трёх подряд идущих чисел тоже нельзя взять более одного: два соседних нельзя брать по доказанному, а если из чисел $a, a+1, a+2$ взять крайние, то их сумма $2a+2$ поделится на их разность, равную двойке. Разобьём теперь числа от 1 до 2021 на 673 группы по три подряд идущих числа $(1, 2, 3; 4, 5, 6; \dots; 2017, 2018, 2019)$ и группу из двух чисел 2020, 2021. Из каждой группы нельзя взять больше одного числа, значит, всего взятых чисел будет не больше, чем 674. Отметим, что аналогично можно было бы использовать числа, которые дают остаток два при делении на три.

5. Найдите 1010-ю цифру после запятой в числе $(3 - 2\sqrt{2})^{2021}$.

РЕШЕНИЕ. Обозначим $a = 3 - 2\sqrt{2}$. Заметим, что $2 \cdot 400 = 800 > 729 = 27^2$; извлекая из обеих частей корень, видим, что $20\sqrt{2} > 27 = 30 - 3$; другими словами, $30 - 20\sqrt{2} < 3$, то есть $a = 3 - 2\sqrt{2} < \frac{3}{10}$. Значит, $a^2 < \frac{9}{100} < \frac{1}{10}$. Получаем, что $a^{2021} < a^{2020} = (a^2)^{1010} < \frac{1}{10^{1010}}$, поэтому на 1010-м месте после запятой у числа a^{2021} стоит нуль.

10 класс. Решения задач

1. При каких натуральных n числа n и n^{2021} оканчиваются на одну и ту же цифру?

РЕШЕНИЕ. *I способ.* При любых. Действительно, последняя цифра числа n^{2021} зависит только от последней цифры числа n . (Вообще, последняя цифра произведения двух чисел равна последней цифре произведения их последних цифр.) Очевидно, что если n оканчивается на 0, 1, 5 или 6, то оно в любой степени будет оканчиваться на ту же цифру. Если n оканчивается на 4 или 9, то оно будет в любой нечётной степени оканчиваться на ту же цифру (так как $4 \cdot 4 = 16$, $6 \cdot 4 = 24$, $9 \cdot 9 = 81$, $9 \cdot 1 = 9$). Наконец, если n оканчивается на 2, 3, 7 или 8, то оно будет оканчиваться на ту же цифру в любой степени, дающей остаток 1 при делении на четыре (проверка аналогична предыдущему случаю). Как бы то ни было, n^{2021} и n оканчиваются на одну и ту же цифру, потому что $2021 = 4 \cdot 505 + 1$.

II способ. Заметим, что

$$n^{2021} - n = n(n^{2020} - 1) = n(n^{1010} - 1)(n^{1010} + 1).$$

Понятно, что из двух чисел n и $n^{1010} - 1$ ровно одно будет чётным. Если n делится на 5, то, очевидно, эта разность делится на 10. Если n даёт остаток 1 или 4 при делении на 5, то $n^{1010} - 1$ кратно пяти. (Это можно проверить, к примеру, так: $(5k \pm 1)^2 = 25k^2 \pm 10k + 1$, то есть n в любой чётной степени будет давать остаток 1 при делении на 5.) Если же n даёт остаток 2 или 3 при делении на 5, то $n^{1010} + 1$ кратно пяти. (Действительно, $(5k \pm 2)^2 = 25k^2 \pm 20k + 4$, откуда всё тривиально вытекает.) Так или иначе, разность $n^{2021} - n$ делится на 10, что и означает, что эти числа оканчиваются на одну и ту же цифру.

2. Для любого натурального числа z обозначим через $S(z)$ сумму его цифр, а через $P(z)$ — произведение его цифр. Рассмотрим последовательность z_n , в которой $z_1 = 1$ и

$$z_n = S(z_{n-1}) + P(z_{n-1})$$

для любого $n \geq 2$. Найдите все натуральные n , для которых $z_n = n$.

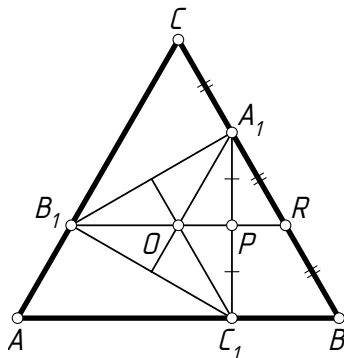
РЕШЕНИЕ. По условию, $z_1 = 1$. Легко проверить, что $z_2 = 2$, $z_7 = 7$, $z_9 = 9$, $z_{19} = 1$, $z_n \leq 18$ и $z_n \neq n$ для всех остальных n от 1 до 19. Значит, других решений, кроме $n = 1, 2, 7, 9$, нет (так как последовательность, очевидно, периодична: $z_{n+18} = z_n$ для любого n).

3. В совместной конференции лжецов (всегда лгут) и правдолюбов (всегда говорят правду) участвовало 55 человек, некоторые из которых знакомы друг с другом. Организатор конференции спросил каждого про каждого из остальных: «Знает ли он этого участника?» Все отвечали только «да» или «нет». Могло ли оказаться, что общее число ответов «да» равно 555?

РЕШЕНИЕ. Нет, не могло. Действительно, рассмотрим двух произвольных участников конференции. Если они оба правдолюбывы и знакомы друг с другом, то они оба ответят на вопрос организатора «да» (а если не знакомы, то оба «нет»). Если они оба лжецы и знакомы друг с другом, то оба ответят на вопрос организатора «нет» (а если не знакомы, то оба «да»). Допустим теперь, что один из них лжец, а другой правдолюб. Если они знакомы, то на вопрос организатора лжец ответит «нет», а правдолюб — «да», если же они незнакомы, то лжец ответит «да», а правдолюб — «нет». Таким образом, чётность количества ответов «да» равна чётности числа пар участников, в которых один лжец, а другой правдолюб, то есть произведению числа лжецов на число правдолюбывов. Но это произведение всегда чётно. В самом деле, общее количество лжецов и правдолюбывов нечётно, поэтом либо количество лжецов, либо количество правдолюбывов чётно.

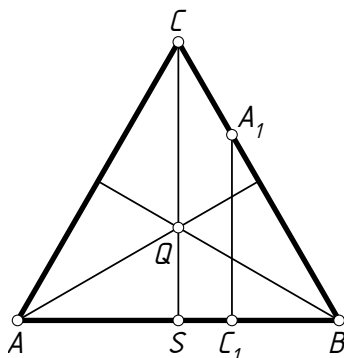
4. На стороне AB треугольника ABC отметили точку C_1 , на стороне BC — точку A_1 , на стороне CA — точку B_1 . Оказалось, что $\frac{AC_1}{C_1B} = \frac{BA_1}{A_1C} = \frac{CB_1}{B_1A} = 2$, а треугольник $A_1B_1C_1$ — равносторонний. Докажите, что исходный треугольник ABC — тоже равносторонний.

РЕШЕНИЕ. *I способ.* Обозначим через O , P , R точку пересечения медиан треугольника $A_1B_1C_1$, середину стороны C_1A_1 и середину отрезка BA_1 (см. рисунок); таким образом, $BR = RA_1 = A_1C$.



Поскольку $\frac{CB_1}{B_1A} = \frac{CR}{RB} = 2$, теорема, обратная теореме Фалеса, гласит, что прямые B_1R и AB параллельны. Аналогично, $\frac{A_1P}{PC_1} = \frac{A_1R}{RB} = 1$, поэтому прямые PR и C_1B параллельны. Значит, точка P на самом деле лежит на прямой B_1R ; другими словами, прямая AB параллельна медиане B_1P треугольника $A_1B_1C_1$. Аналогично, две оставшиеся стороны треугольника ABC будут параллельны двум оставшимся медианам треугольника $A_1B_1C_1$ соответственно. Теперь из параллелограмма $BROC_1$ мы видим, что угол B треугольника ABC равен углу C_1OP между медианами правильного треугольника $A_1B_1C_1$, то есть 60° . Так же находим, что два остальных угла треугольника ABC равны 60° , поэтому он правильный.

II способ. Обозначим через Q , S точку пересечения медиан треугольника ABC и середину стороны AB соответственно (см. рисунок).



Тогда $\frac{AS}{AB} = \frac{3}{6}$, а $\frac{AC_1}{AB} = \frac{4}{6}$, поэтому $C_1B = 2SC_1 = \frac{2}{6}AB$. С другой стороны, $BA_1 = 2A_1C$, поэтому по теореме, обратной теореме Фалеса, прямые A_1C_1 и CS параллельны. Аналогично, две оставшиеся медианы треугольника ABC параллельны двум оставшимся сторонам правильного треугольника $A_1B_1C_1$, поэтому все шесть углов, сходящихся в точке Q , равны 60° . Отсюда легко вывести, что треугольник ABC правильный. К примеру, можно заметить, что в треугольнике AQB медиана QS является ещё и биссектрисой, а значит, и высотой. Аналогично, две остальные медианы треугольника ABC также являются его высотами, что и означает, что он правильный.

III способ. Как и в предыдущем способе, обозначаем через S середину стороны AB и доказываем, что $\frac{BA_1}{A_1C} = \frac{BC_1}{C_1S} = 2$, поэтому A_1C_1 и CS параллельны, а треугольники BA_1C_1 и BCS

подобны. Значит, $\frac{CS}{A_1C_1} = \frac{BC}{BA_1} = \frac{3}{2}$. Аналогично находим, что две оставшиеся медианы равны двум оставшимся сторонам правильного треугольника $A_1B_1C_1$. Получается, что в треугольнике ABC все три медианы равны, откуда легко выводится, что он правильный. (Например, так. Если медианы AA_2 и BB_2 равны, то треугольники AQB_2 и BQA_2 равны по двум сторонам и углу между ними. Дальше очевидно.)

5. Сумма каких-то четырёх чисел равна сумме их квадратов. Произведение этих четырёх чисел равно единице. Докажите, что все четыре этих числа равны единице.

РЕШЕНИЕ. Обозначим эти четыре числа через a, b, c, d , тогда $abcd = 1$. Обозначим также $t = a + b + c + d = a^2 + b^2 + c^2 + d^2$. Согласно неравенству Коши, $t = (a^2 + b^2) + (c^2 + d^2) \geq 2|ab| + 2|cd|$. Аналогично, $t \geq 2|ac| + 2|bd|$ и $t \geq 2|ad| + 2|bc|$. Складывая эти неравенства, получим, что

$$3t \geq 2(|ab| + |ac| + |ad| + |bc| + |bd| + |cd|) = (|a| + |b| + |c| + |d|)^2 - (a^2 + b^2 + c^2 + d^2).$$

При этом $|a| + |b| + |c| + |d| \geq a + b + c + d = t = a^2 + b^2 + c^2 + d^2 > 0$, так что $(|a| + |b| + |c| + |d|)^2 \geq t^2$, откуда $3t \geq t^2 - t$, то есть $t \leq 4$. С другой стороны, применяя ещё раз неравенство Коши, мы получаем, что $t \geq 2|ab| + 2|cd| \geq 4\sqrt{|abcd|} = 4$. Значит, $t = 4$ а все нестрогие неравенства, которые у нас возникали, на самом деле являются равенствами.

Но неравенство Коши может быть равенством, только если слагаемые равны, откуда, к примеру, $a^2 + b^2 = c^2 + d^2$ и $a^2 + c^2 = b^2 + d^2$; вычитая из одного равенства другое, мы видим, что $b^2 = c^2$. Рассуждая аналогично, получим, что $|a| = |b| = |c| = |d| = 1$. Однако, если хоть одно из этих чисел отрицательно, то их сумма не может равняться $t = 4$. Получается, что все эти четыре числа равны единице.

11 класс. Решения задач

1. Решите уравнение $x^2 - 4x \cdot \cos(\pi x^{2021}) + 4 = 0$.

РЕШЕНИЕ. Выражение $4x \cdot \cos(\pi x^{2021})$ по модулю не превосходит $4|x|$, поэтому левая часть уравнения не меньше, чем $x^2 - 4|x| + 4 = (|x| - 2)^2$. Равенство нулю может достигаться лишь при $\cos(\pi x^{2021}) = \pm 1$. Если $\cos(\pi x^{2021}) = 1$, то $x = 2$. Если же $\cos(\pi x^{2021}) = -1$, то $x = -2$, но это неверно: $\cos(-2^{2021}\pi) = 1 \neq -1$. Значит, $x = 2$ — единственное решение.

2. Для любого натурального числа z обозначим через $S(z)$ сумму его цифр, через $P(z)$ — произведение его цифр, а через $N(z)$ — количество его цифр. Для любого натурального k рассмотрим последовательность $z_n(k)$, в которой $z_1(k) = k$ и

$$z_n(k) = (P(z_{n-1}(k)) + N(z_{n-1}(k))) \cdot S(z_{n-1}(k))$$

для любого $n \geq 2$. Какое число больше, $z_{2022}(2021)$ или $z_{2020}(1)$?

РЕШЕНИЕ. Ясно, что если $z_n(k) = 20$, то $z_{n+2t-1}(k) = 4$ и $z_{n+2t}(k) = 20$ для любого натурального t . Аналогично, если $z_n(k) = 12$, то $z_{n+t}(k) = 12$ для любого натурального t . Остаётся заметить, что $z_2(2021) = 20$ и $z_6(1) = 12$, поэтому $z_{2022}(2021) = 20 > 12 = z_{2020}(1)$.

3. Все грани многогранника — треугольники. Сколько граней у него может быть?

РЕШЕНИЕ. Любое чётное число, начиная с 4. Действительно, обозначим число граней через f , а число рёбер — через e . Поскольку каждая грань ограничена тремя рёбрами, а каждое ребро разделяет две грани, $2e = 3f$, поэтому число граней не может быть нечётным. Покажем теперь, что для любого $2n \geq 4$ существует многогранник с таким числом граней, у которого все грани — треугольники. При $2n = 4$ годится треугольная пирамида, а при $2n > 4$ можно взять две одинаковые n -угольные пирамиды и «склеить» их основаниями.

4. Существуют ли целые числа x и y , для которых $x^3 = 4y^2 + 4y - 3$?

РЕШЕНИЕ. Нет, не существуют. Действительно, перепишем равенство из условия в виде

$$x^3 = (2y - 1)(2y + 3).$$

Сомножители в правой части — нечётные числа, отличающиеся на 4. Ясно, что они взаимно просты (два и три не могут быть их общими множителями, а любое другое простое число p больше четырёх, поэтому если одно из этих чисел делится на p , то второе — нет). Раз произведение этих взаимно простых сомножителей является точным кубом, то каждый из них является точным кубом. Но точные кубы не могут отличаться на 4. В самом деле, нулём ни одно из чисел x и y быть не может по очевидным причинам, $1^3 - (-1)^3 = 2$, разность любых двух других кубов разных знаков по модулю не меньше, чем $1^3 - (-2)^3 = 9$. Если же оба куба одного знака (скажем, оба положительны), то их разность не меньше по модулю, чем

$$(n + 1)^3 - n^3 = 3n^2 + 3n + 1 > 4.$$

5. В ряд стоит 25 осликов, самый правый из них — Иа-Иа. Винни-Пух хочет дать каждому ослику по воздушному шару одного из семи разных цветов радуги (включая зелёный) так, чтобы стоящие рядом ослики получили бы шары разного цвета и шарик каждого цвета хоть кто-нибудь да получил бы. Иа-Иа хочет подарить каждому из 24 остальных осликов горшок одного из цветов радуги (кроме зелёного) так, чтобы горшок каждого цвета хоть кто-нибудь да получил бы (но соседи могут получать и одноцветные горшки). У кого больше способов осуществить задуманное и во сколько раз — у Винни-Пуха или у Иа-Иа?

РЕШЕНИЕ. У Винни-Пуха в 7 раз больше способов осуществить задуманное, чем у Иа-Иа. Пронумеруем цвета радуги числами от 1 до 7 так, чтобы зелёный был седьмым. Допустим, что

Иа-Иа уже подарил остальным осликам горшки, окрашенные в первые шесть цветов, так, как хотел. Тогда Винни-Пух может раздавать шарики следующим образом. Ослику Иа-Иа он даст шарик зелёного цвета. Далее Винни-Пух будет двигаться вдоль ряда осликов справа налево, давая каждому шарик того же цвета, что и горшок. При этом если Винни-Пух обнаруживает двух осликов подряд с горшками одного цвета, то второму из них он даёт зелёный шарик. После этого Винни-Пух забывает об этом событии и продолжает раздавать шарики. Очевидно, в итоге шарики будут розданы так, как требовалось Винни-Пуху.

Обратно, пусть Винни-Пух уже раздал шарики так, как хотел. Тогда Иа-Иа нужно идти справа налево вдоль ряда осликов. Всем осликам, у которых шарик не зелёный, нужно давать горшок того же цвета, что и шарик. Каждому ослику же с зелёным шариком нужно давать горшок того же цвета, что у его соседа справа. Это задаёт взаимно однозначное соответствие между способами раздачи горшков и способами раздачи шариков, в которых Иа-Иа получает зелёный шарик. Понятно, что общее число способов раздачи шариков в 7 раз больше.